**Theoretische Physik II**
**für Lehramtsstudenten**
**WS 2005/06**

Vorlesungen: Michael Flohr
Übungen: Sebastian Uhlmann
Übungsleitung: Kirsten Vogeler

---

## 3. Übung

(Abgabe: 08.11.2005)

8. *Schwankungsquadrat bei Gemischen*: In der Vorlesung wurde hergeleitet, daß ein Gemisch aus zwei Gemischen mit Dichtematrizen $\hat{\rho}$ und $\tilde{\rho}$ durch eine Dichtematrix der Form $\rho(\lambda) = \lambda\hat{\rho} + (1-\lambda)\tilde{\rho}$ beschrieben wird. Berechnen Sie das Unschärfequadrat eines Operators $A$ in einem solchen Gemisch von Gemischen,

$$(\Delta_{\rho(\lambda)}A)^2 = \operatorname{tr}\rho(\lambda)A^2 - (\operatorname{tr}\rho(\lambda)A)^2\,,$$

als quadratisches Polynom in $\lambda$, und begründen Sie so, daß das Unschärfequadrat eine konkave Funktion von $\lambda$ ist,

$$(\Delta_{\rho(\lambda)}A)^2 \geq \lambda(\Delta_{\hat{\rho}}A)^2 + (1-\lambda)(\Delta_{\tilde{\rho}}A)^2\,.$$

[Tip: Ableiten.]
Das Schwankungsquadrat einer Mischung von Gemischen ist also mindestens die anteilige Summe der Schwankungsquadrate; zeigen Sie, daß Gleichheit nur gilt, wenn die Mittelwerte $\operatorname{tr}\hat{\rho}A$ und $\operatorname{tr}\tilde{\rho}A$ übereinstimmen. (5 P.)

9. *Schwankungsprodukt der Oszillatoreigenzustände*: Berechnen Sie für den harmonischen Oszillator im Eigenzustand $|\Lambda_n\rangle$ des Anzahloperators das Schwankungsprodukt $(\Delta X)(\Delta P)$. (4 P.)

10. *Rechnen mit Operatoren*:

    (a) Falls ein Operator $A$ mit dem Kommutator $[A,B]$ vertauscht (d.h. falls $[A,[A,B]] = 0$), läßt sich $[A^2,B] = A[A,B] + [A,B]A$ vereinfachen zu $[A^2,B] = 2A[A,B]$. Zeigen Sie durch Fortsetzung dieses Verfahrens, daß für ein operatorwertiges Polynom $p(A)$ gilt:

    $$[p(A),B] = p'(A)[A,B]\,, \qquad \text{falls} \qquad [A,[A,B]] = 0\,;$$

    hierbei ist $p'(x) \equiv \frac{dp(x)}{dx}$ die Ableitung von $p(x)$. Indem man $p(x)$ als Teilsumme einer Potenzreihe auffaßt, läßt sich dieses Ergebnis verallgemeinern für analytische Funktionen $f(x)$. (1 P.)

    (b) Beweisen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

    $$\mathrm{e}^B A\,\mathrm{e}^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2}[B,[B,A]] + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[B,A]_n$$
    $$\text{mit} \qquad [B,A]_{n+1} = [B,[B,A]_n]\,, \qquad [B,A]_0 = A\,.$$

    Tip: Stellen Sie dazu eine Differentialgleichung 1. Ordnung in $\lambda$ für die operatorwertige Funktion $C(\lambda) := \mathrm{e}^{\lambda B}A\,\mathrm{e}^{-\lambda B}$ auf und lösen Sie sie durch Iteration der Gleichung $C(\lambda) = C(0) + \int_0^\lambda \mathrm{d}\lambda'\,\frac{d}{d\lambda'}C(\lambda')$. (4 P.)

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b) die Formel

$$e^B e^A e^{-B} = e^C \qquad \text{mit} \qquad C := e^B A \, e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [B, A]_n \,. \qquad \text{(1 P.)}$$

(d) Leiten Sie die folgende Relation her:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \,, \qquad \text{falls} \qquad [A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0 \,.$$

Tip: Differenzieren Sie $f(\lambda) := e^{\lambda A} e^{\lambda B} e^{-\lambda(A+B)}$ nach $\lambda$ und lösen Sie die sich ergebende Differentialgleichung. (4 P.)